

TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

* LÝ THUYẾT:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D , có đồ thị là đường cong (C) . Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0, y_0)$ có phương trình: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$, trong đó $f'(x_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến, x_0 là hoành độ tiếp điểm, y_0 là tung độ tiếp điểm.

CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0, y_0)$.

Thế x_0 vào y' để tìm $f'(x_0)$. Từ đó viết phương trình theo công thức.

Dạng 2: Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 .

Thế x_0 lần lượt vào y và y' để tìm $y_0, f'(x_0)$. Từ đó viết phương trình theo công thức.

Dạng 3: Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có tung độ y_0 .

Giải phương trình $y_0 = f(x_0)$ để tìm x_0 . Quay lại dạng 1.

Dạng 4: Viết phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $d: y = ax + b$.

Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x_0) = ax_0 + b$ để tìm x_0 . Thế x_0 vào y để tìm y_0 . Từ đó viết phương trình theo công thức.

* Trường hợp đặc biệt:

+ Viết phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $\Rightarrow x_0 = 0$.

+ Viết phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành $\Rightarrow y_0 = 0$.

Dạng 5: Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hệ số góc k .

Giải phương trình $k = f'(x_0)$ tìm x_0 . Thế x_0 vào y để tìm y_0 rồi viết phương trình theo công thức.

Dạng 6: Viết phương trình tiếp tuyến, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = ax + b$.

Áp dụng lý thuyết: *Hệ số góc của tiếp tuyến bằng với hệ số góc của đường thẳng $\Rightarrow f'(x_0) = a$.*
Giải phương trình tìm x_0 . Thế x_0 vào y để tìm y_0 . Từ đó viết phương trình theo công thức.

Dạng 7: Viết phương trình tiếp tuyến, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = ax + b$.

Áp dụng lý thuyết: *Tích giữa hệ số góc của tiếp tuyến với hệ số góc của đường thẳng bằng $-1 \Rightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{a}$.* Giải phương trình tìm x_0 . Thế x_0 vào y để tìm y_0 rồi viết phương trình theo công thức.

Lưu ý: Đối với dạng 6 và dạng 7, nếu đường thẳng d có dạng phương trình: $mx + ny + p = 0$ thì chuyển về đúng dạng $y = -\frac{m}{n}x - \frac{p}{n}$ rồi mới xác định hệ số góc của đường thẳng d .

Dạng 8: Viết phương trình tiếp tuyến, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(m; n)$.

Gọi $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$. Thế tọa độ điểm $A(m; n)$ vào phương trình tiếp tuyến, kết hợp giả thiết $y_0 = f(x_0)$, ta được: $n = f'(x_0)(m - x_0) + f(x_0)$, là phương trình theo x_0 , giải tìm được x_0 . Quay lại dạng 2.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm $M(-1; -2)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 4$ tại điểm $A(1;2)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại điểm $M(2;4)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại điểm $M(0;-1)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ bằng -3 .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 6: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 7: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 8: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 0 .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 9: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x + 1$ tại điểm có tung độ bằng 2 .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 10: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-4}{x-4}$ tại điểm có tung độ bằng 3.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 11: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-4}{x-3}$ tại giao điểm của đồ thị với trục hoành.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 12: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{2x-1}$ tại giao điểm của đồ thị với trục hoành.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 13: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 6x - 11$ tại giao điểm của đồ thị với trục tung.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 14: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm có hoành độ x_0 thỏa $y''(x_0) = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 15: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ x_0 thỏa $2y''(x_0) + y'(x_0) + 15 = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 16: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ tại điểm cực tiểu.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 17: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$ tại điểm $M(-3; -2)$ cắt đồ thị tại điểm thứ hai là N . Tìm tọa độ điểm N .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 18: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng -3 .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 19: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1 .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 20: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng -5 .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 21: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 22: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 2$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $2x + y - 5 = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 23: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{2x-1}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 24: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 9y - 9 = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 25: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{2x+1}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{5}x + 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 26: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(2;0)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 27: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;-2)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 28: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A\left(\frac{19}{12}; 4\right)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 29: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 4$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-4; -24)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 30: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(0;1)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 31: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-6;5)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 32: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+4}{x-1}$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(2;3)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 33: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(4;3)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 34: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-7;5)$.

.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 35: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(0;2)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 36: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1; 3)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Câu 1. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 1$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ bằng:

- A. -2 B. 2 C. 0 D. 3

Câu 2. Tiếp tuyến của $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại giao điểm của (C) với trục tung là:

- A. $y = 0$ B. $y = 2$ C. $y = -3x$ D. $y = -3x + 2$

Câu 3. Tiếp tuyến của $(C): y = x^3 - x^2 + 2x - 3$ tại giao điểm của (C) với đường thẳng $x = 1$ là:

- A. $y = 3x - 4$ B. $y = -2x + 1$ C. $y = -3$ D. $y = -1$

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 + x + 2$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến tại điểm $N(1; 4)$ của (C) cắt đồ thị (C) tại điểm thứ hai là M . Khi đó tọa độ điểm M là:

- A. $M(-1; 0)$. B. $M(-2; -8)$. C. $M(0; 2)$. D. $M(2; 12)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến tại điểm $A(-3; -2)$ của đồ thị (C) cắt đồ thị tại điểm thứ hai có tọa độ là kết quả nào?

- A. $M(1; 10)$ B. $M(-2; 1)$ C. $M(2; 33)$ D. $M(-1; 0)$

Câu 6. Tìm điểm thuộc đồ thị hàm số $(C): y = x^3 + 3x^2 - 3$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm đó có hệ số góc bằng 9:

- A. $(1; 1)$ B. $(-3; 3)$ C. $(1; 3)$ D. $(3; -1)$

Câu 7. Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^4 + 2x^2 + 3$ biết tiếp tuyến song song với trục hoành:

- A. $y = 3x - 4$ B. $y = 2; y = 6$ C. $y = 2; y = 3$ D. $y = 3$

Câu 8. Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $OB = 36OA$ có phương trình là:

- A. $\begin{cases} x - 36y - 4 = 0 \\ x + 36y - 4 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = -36x - 86 \\ y = 36x - 86 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = -36x + 58 \\ y = 36x + 58 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x - 36y + 14 = 0 \\ x + 36y + 14 = 0 \end{cases}$

Câu 9. Cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C) , mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2016$. Khi đó tổng $x_1 + x_2$ bằng:

- A. $\frac{4}{3}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. -1 .

Câu 10. Trong các tiếp tuyến của $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất là:

- A. $y = 0$ B. $y = -3x + 3$ C. $y = -3x$ D. $y = -3x - 3$

Câu 11. Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ có tính chất nào?

- A. Song song với đường thẳng $x = 1$. B. Song song với trục hoành.
C. Có hệ số góc dương. D. Có hệ số góc bằng -1 .

Câu 12. Số tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; -6)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ là:

- A. 1 B. 0 C. 2 D. 3

Câu 13. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+2}{2x+1}$ tại giao điểm của nó với Ox có phương trình là:

- A. $y = -2x$ B. $y = -2x + 1$ C. $y = -2x - 2$ D. $y = 2x + 1$.

Câu 14. Gọi d là tiếp tuyến với $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}$ tại điểm có tung độ bằng 1. Tìm hệ số góc của d .

- A. 0. B. 1. C. -1. D. 2.

Câu 15. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ bằng 0 cắt hai trục tọa độ lần lượt tại A và B . Diện tích tam giác OAB là:

- A. 2 B. 3 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ có đồ thị (C) và gốc tọa độ O . Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) , biết Δ cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân. Phương trình Δ là:

- A. $y = x + 1$. B. $y = x + 4$. C. $y = x - 4$. D. $y = x$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C) . Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ với $x_0 > -1$ là điểm thuộc (C) ,

biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d: 4x + y = 0$. Hỏi giá trị của $x_0 + 2y_0$ bằng bao nhiêu?

- A. $-\frac{7}{2}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $-\frac{5}{2}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = \sqrt{2x+1}$ có đồ thị (C) . Biết tiếp tuyến d của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng $y = -3x + 2017$. Hỏi hoành độ tiếp điểm của d và (C) bằng bao nhiêu?

- A. $-\frac{4}{9}$. B. 1. C. 4. D. -4.

DẠNG 2: TÌM M ĐỂ TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + m + 1$ tiếp xúc với trục hoành khi giá trị m bằng bao nhiêu?

- A. $m = -1$ B. $m = \pm 1$ C. $m = 1$ D. $m \neq 1$

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C) . Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 đi qua $A(1; 3)$?

A. $m = \frac{7}{9}$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = -\frac{1}{2}$.

D. $m = -\frac{7}{9}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^4 + \frac{1}{2}mx^2 + m - 1$ có đồ thị (C) . Biết tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 vuông góc với đường thẳng có phương trình $x - 3y + 1 = 0$. Khi đó giá trị của m là:

A. $m = -1$.

B. $m = 0$.

C. $m = -\frac{13}{3}$.

D. $m = -\frac{11}{3}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ (1), m là tham số thực. Kí hiệu (C_m) là đồ thị hàm số (1); d là tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 1. Tìm m để khoảng cách từ $B\left(\frac{3}{4}; 1\right)$ đến đường thẳng d đạt giá trị lớn nhất?

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = -2$.

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ có đồ thị (C_m) . Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 0 song song với đường thẳng $y = 3x + 1$?

A. $m = 3$.

B. $m = 1$.

C. $m = -2$.

D. $m = 2$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm hai tiệm cận của (C) . Tìm điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng MI ?

A. $M\left(4; \frac{7}{3}\right)$.

B. $M\left(3; \frac{5}{2}\right)$.

C. $M(2; 3)$.

D. $M(5; 3)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị là (C) , đường thẳng $d: y = x + m$. Với mọi m ta luôn có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B . Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B . Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = -1$.

B. $m = -2$.

C. $m = 3$.

D. $m = -5$.